

## ***Εμπειρικές σχέσεις για τον υπολογισμό του ακουστικού πεδίου περίθλασης γύρω από σφήνες***

Σωτήριος Σαλάγας<sup>1</sup>, Πηνελόπη Μενούνου<sup>1</sup> και Πέτρος Νικολάου<sup>1</sup>  
<sup>1</sup>Department of Mechanical Engineering and Aeronautics, University of Patras,  
University of Patras Campus, 26504, Patras, Greece.

### **ΠΕΡΙΛΗΨΗ**

*Εμπειρικές λύσεις για την περίθλαση σφαιρικού κύματος γύρω από σφήνα παρουσιάζονται στο πεδίο των συχνοτήτων. Οι λύσεις μπορούν να επιταχύνουν τον υπολογισμό της περίθλασης σε σχέση με τις αντίστοιχες αναλυτικές κατά τάξεις μεγέθους διατηρώντας παράλληλα την ίδια ακρίβεια. Με βάση τη γνώση των συγγραφέων εμπειρική λύση για χαμηλές συχνότητες παρουσιάζεται για πρώτη φορά. Οι προτεινόμενες λύσεις συγκρίνονται ως προς την ακρίβεια και την υπολογιστική ταχύτητά τους με άλλες υπάρχουσες εμπειρικές λύσεις.*

### ***Empirical formulas for the calculation of the diffraction field around wedges***

### **ABSTRACT**

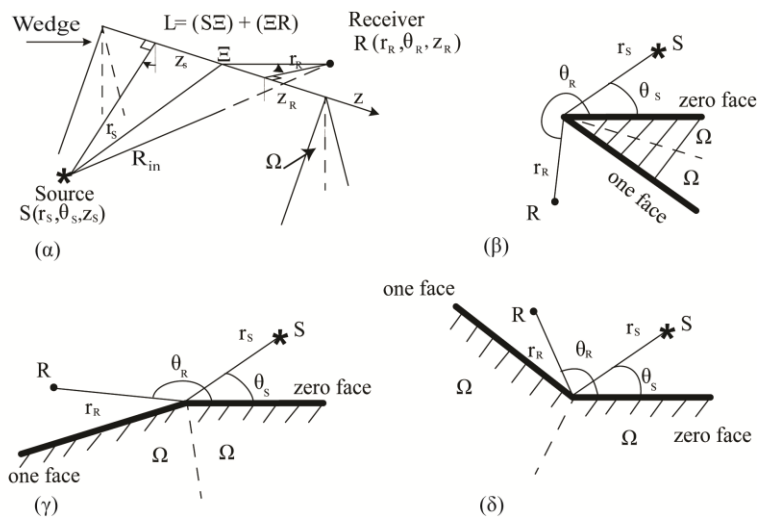
Empirical formulas for the diffraction of spherical incident wave around a wedge in frequency domain are presented. The solutions can accelerate the calculation of diffraction by orders of magnitude of computational time compared to analytical models. To the best of the authors' knowledge an Empirical formula for wedge diffraction for low frequencies is presented for the first time. The proposed solutions are compared to existing empirical formulas, in terms of accuracy and computational time.

## Εισαγωγή

Στο παρόν άρθρο παρουσιάζονται οι εμπειρικές λύσεις για το πρόβλημα της περίθλασης σφαιρικού κύματος γύρω από σφήνα στο πεδίο των συχνοτήτων που έχουν προταθεί στην αναφορά [1]. Οι εμπειρικές λύσεις προσφέρουν έναν εύκολο και γρήγορο υπολογισμό της περίθλασης. Σε σύγκριση με τις υπάρχουσες αναλυτικές λύσεις οι εμπειρικές λύσεις απαιτούν τάξεις μεγέθους λιγότερο υπολογιστικό χρόνο για τον υπολογισμό τους.

Η παρούσα εργασία βασίζεται σε μία καινούργια αναλυτική προσεγγιστική λύση (δεν ισχύει για χαμηλές συχνότητες) για την περίθλαση σφαιρικού κύματος από ακουστικά σκληρή ακμή.[2] Η αναλυτική λύση περιέχει όρους με ολοκληρώματα Fresnel. Μια εμπειρική λύση προκύπτει από την προσέγγιση με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων των όρων των ολοκληρωμάτων Fresnel. Η εμπειρική παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 1. Όπως και η προσεγγιστική λύση από την οποία προέκυψε η εμπειρική λύση δεν ισχύει για χαμηλές συχνότητες. Στο κεφάλαιο 2 προτείνονται διορθωτικοί όροι οι οποίοι επεκτείνουν την ισχύ της εμπειρικής λύσης και στις χαμηλές συχνότητες. Προκύπτει μια εμπειρική λύση η οποία ισχύει σε όλο το εύρος των συχνοτήτων. Με βάση τη γνώση των συγγραφέων μία τέτοια λύση παρουσιάζεται για πρώτη φορά. Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζεται και συγκρίνεται με άλλες λύσεις η ακρίβεια των προτεινόμενων λύσεων σε σχέση με την ακριβή αναλυτική λύση.

Η γεωμετρία του προβλήματος φαίνεται στο Σχήμα 0.1. Για την ανάλυση χρησιμοποιείται κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων  $(\theta, r, z)$  που έχει σαν άξονα συμμετρίας (άξονας  $z$ ) την ακμή της σφήνας. Οι συντεταγμένες της πηγής και του δέκτη είναι  $S(\theta_S, r_S, z_S)$  και  $R(\theta_R, r_R, z_R)$  αντίστοιχα. Η γωνία της σφήνας ορίζεται ως  $2\Omega$ . Υπάρχουν ανοικτές σφήνες  $0 \leq \Omega < \pi/2$  [Σχήμα 0.1(β) και (γ)] και κλειστές σφήνες [Σχήμα 0.1(δ)]  $\pi/2 < \Omega < \pi$ . Η μία πλευρά της σφήνας θεωρείται σταθερή στη θέση  $\theta = 0$ . Αυτή η πλευρά ονομάζεται «zero face». Η δεύτερη πλευρά μπορεί να αλλάξει τη θέση της  $\theta = 2\pi - 2\Omega$  και ονομάζεται «one face». Η ελάχιστη απόσταση που διανύει ο ήχος από την πηγή μέχρι τον δέκτη λόγω περίθλασης είναι  $L = \sqrt{(r_S^2 + r_R^2) + (z_R - z_S)^2}$ .



Σχήμα 0.1 Γεωμετρία της Σφήνας.

Η ανάλυση βασίζεται σε πρόσφατη αναλυτική προσεγγιστική λύση των συγγραφέων την περίθλαση σφαιρικού κύματος γύρω από σκληρή σφήνα στο πεδίο των συχνοτήτων. Η λύση είναι:

$$P_d = \sum_{j=1}^4 P_d^j = \sum_{j=1}^4 -i \frac{1}{L} e^{i(kL - \frac{\pi}{4})} D^j \Psi^j \quad (0.1)$$

$$D^j = \frac{\sin(b_j)}{2\sqrt{1 - \cos(b_j)}}, \quad \Psi^j = e^{-i\omega\tau_{lag}^j} \left[ \frac{1-i}{2} + iF\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\omega\tau_{lag}^j\right) \right]$$

$$b_j = \pm \frac{\theta_R}{\gamma} \pm \frac{\theta_S}{\gamma} + \frac{\pi}{\gamma}, \quad \gamma\pi = 2\pi - 2\Omega, \quad \tau_{lag}^j = \gamma^2 \frac{r_S r_R}{Lc} (1 - \cos(b_j)) \quad (0.2)$$

όπου  $F(x) = \int_0^x e^{i\frac{\pi}{2}z^2} dz$  είναι το μιγαδικό ολοκλήρωμα Fresnel,  $k$  ο αριθμός κύματος  $k=2\pi f/c$  ( $f$  η συχνότητα της πηγής) και  $\omega$  η γωνιακή συχνότητα της πηγής.

Οι προτεινόμενες λύσεις συγκρίνονται με την ακριβή λύση περίθλασης σφαιρικού σήματος για ακουστικά σκληρή σφήνα:

$$P_{exact} = \sum_{j=1}^4 P_{exact}^j$$

$$P_{exact}^j = -\frac{1}{2\pi\gamma} \int_0^\infty \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\sin(b_j)}{\cosh(\zeta/\gamma) - \cos(b_j)} d\zeta \quad (0.3)$$

$$R = \sqrt{r_S^2 + r_R^2 + 2r_S r_R \cosh(\zeta) + (z_R - z_S)^2}$$

Με βάση την αναφορά [1] οι δύο λύσεις εξ. (0.1) και εξ. (0.5) συμφωνούν για  $\Gamma = krr_0/L > 2$ .

$$(0.4)$$

### 1. Εμπειρική Λύση

Η προτεινόμενη εμπειρική λύση βασίζεται στην παρατήρηση ότι η συνάρτηση  $\Psi^j$  που περιέχει τα ολοκληρώματα Fresnel Εξ. (0.1) είναι συνάρτηση μιας μεταβλητής:

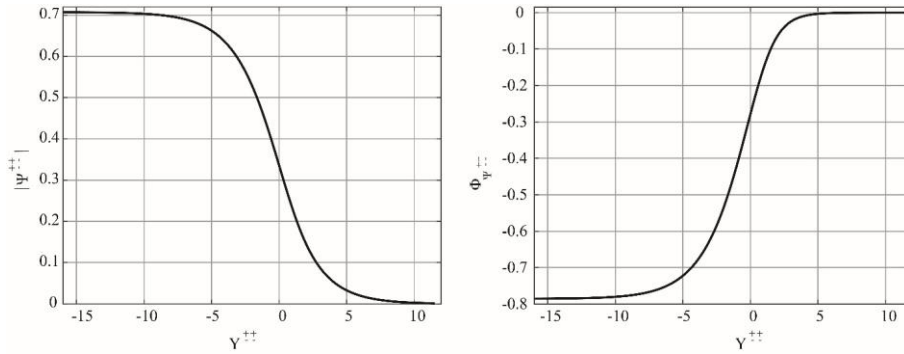
$$\Psi^j = \Psi^j(S^j), \quad S^j = \omega\tau_{lag}^j = \frac{kr_S r_R}{L} \gamma^2 (1 - \cos(b_j)). \quad (1.1)$$

Η ποσότητα  $\Psi^j$  είναι μιγαδική με:

$$\Psi^j = \Psi_{real}^j + i\Psi_{imag}^j = |\Psi^j| e^{i\Phi_{\Psi^j}}, \quad (1.2)$$

όπου  $\Psi_{real}^j$  και  $\Psi_{imag}^j$  το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της  $\Psi^j$ , αντίστοιχα,  $|\Psi^j|$  το μέτρο και  $\Phi_{\Psi^j}$  η φάση της  $\Psi^j$ . Έχει παρατηρηθεί ότι το μέτρο και η φάση της  $\Psi^j$  είναι συναρτήσεις τύπου S ως προς μια μεταβλητή  $Y^j$  (βλέπε Σχήμα 1.1) όπου:

$$Y^j = \ln(S^j). \quad (1.3)$$



Σχήμα 1.1 Μέτρο (αριστερά) και φάση (δεξιά) της  $\Psi^j$  Εξ. (0.1) ως προς την μεταβλητή  $Y^j$  Εξ. (1.2).

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση η συνάρτηση  $\Psi^j$  μπορεί να προσεγγιστεί με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων. Η προσέγγιση θα γίνει σε ένα διάστημα  $S^j \in [10^{-7}, 10^5]$  ώστε να συμπεριλαμβάνονται όλες οι πιθανές τιμές του  $S^j$ . Έπειτα από αριθμητική μελέτη προέκυψε ότι το καλύτερο μοντέλο για την  $\Psi^j$  είναι άθροισμα λογιστικών συναρτήσεων  $a_n / (1 + e^{b_n Y^j + c_n})$ , όπου  $a_n, b_n, c_n$  είναι συντελεστές ελαχίστων τετραγώνων. Τελικά η προτεινόμενη προσέγγιση είναι:

$$|\Psi^j(Y^j)| = \sum_{n=1}^3 \left[ \frac{a_n}{1 + e^{b_n Y^j + c_n}} \right] + d \quad (1.4)$$

Οι συντελεστές  $a_n, b_n, c_n$  και  $d$  δίνονται στην αναφορά [1]. Η προσέγγιση της Εξ. (1.4) έχει ρίζα μέσου τετραγωνικού σφάλματος ίση με  $RMSE = 1.667 \times 10^{-5}$ .

Παρομοίως για τη φάση βρίσκουμε:

$$\Phi_{\Psi_{emp}^j} = \left( \sum_{n=1}^4 \frac{A_n}{1 + e^{B_n Y^j + C_n}} \right) + D \quad (1.5)$$

Τελικά η εμπειρική λύση δίνεται από:

$$P_{d,emp}^j = \sum_{j=1}^4 -i \frac{1}{L} e^{i(kL - \frac{\pi}{4})} D^j |\Psi_{emp}^j| e^{i\Phi_{\Psi_{emp}^j}}. \quad (1.6)$$

## 2. Εμπειρική λύση διορθωμένη για μικρές συχνότητες

Η Εξ. (1.6) όπως και η Εξ. (0.1) από την οποία προέκυψε δεν είναι έγκυρες για χαμηλές συχνότητες. Συγκεκριμένα ισχύουν για  $\Gamma = krr_0/L > 2$ . Στον παρόν κεφάλαιο αναπτύσσεται μια εμπειρική λύση που ισχύει για χαμηλότερες συχνότητες. Η λύση προκύπτει ως διόρθωση της Εξ. (1.6) για χαμηλές συχνότητες. Συγκεκριμένα προτείνεται η πρόσθεση δύο διορθωτικών όρων στο μέτρο και στη φάση του  $\Psi^j$ . Η Διορθωμένη μορφή του  $\Psi^j$  έχει τη μορφή:

$$\Psi_{ext,emp}^j = \left( |\Psi_{emp}^j| + |\Psi_{corr}^j| \right) e^{i(\Phi_{\Psi_{emp}^j} + \Phi_{\Psi_{corr}^j})}, \quad (2.1)$$

όπου  $|\Psi_{corr}^j|$  και  $\Phi_{\Psi_{emp}^j}$  οι διορθωτικοί όροι του μέτρου και της φάσης.

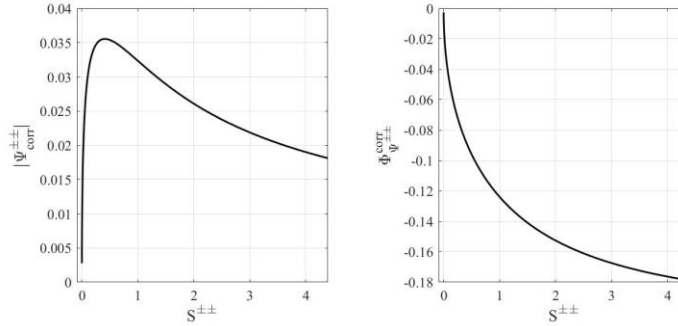
Συγκεκριμένα οι διορθωτικοί όροι ορίζονται ως οι διαφορές μέτρου και φάσης της εμπειρικής [Εξ. (1.6)] από την ακριβή λύση [Εξ. (0.4)]. Έστω ότι η ακριβής λύση

μπορεί να γραφτεί ως  $-i \frac{1}{L} e^{i(kL - \frac{\pi}{4})} D^j |\Psi_{exact}^j| \Phi_{\Psi_{exact}^j}$ , όπου  $|\Psi_{exact}^j|$  και  $\Phi_{\Psi_{exact}^j}$  το

μέτρο και η φάση της. Τότε οι διορθωτικοί όροι  $|\Psi_{corr}^j|$  και  $\Phi_{\Psi_{emp}^j}$  δίνονται από:

$$\begin{aligned} |\Psi_{corr}^j| &= |\Psi_{exact}^j| - |\Psi_{emp}^j| \\ \Phi_{\Psi_{corr}^j} &= \Phi_{\Psi_{exact}^j} - \Phi_{\Psi_{emp}^j} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Για δεδομένο  $\Gamma$  και δεδομένη γωνία σφήνας  $2\Omega$  οι διαφορές οι διορθωτικοί όροι έχουν τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα 2.1.



Σχήμα 2.1 Διορθωτικοί όροι  $|\Psi_{corr}^j|$  και  $\Phi_{\Psi_{emp}^j}$  της Εξ. (1.6) για χαμηλές συχνότητες.

Μορφή για σταθερό  $\Gamma$  και σταθερή γωνία σφήνας  $2\Omega$ .

Έχει παρατηρηθεί ότι όσο μεγαλώνει η συχνότητα (μέσω του  $\Gamma$ ) τόσο μικρότερη πρέπει να είναι η διόρθωση στο μέτρο και στη φάση. Επιπλέον, όσο μεγαλώνει η γωνία της σφήνας τόσο μεγαλύτερη πρέπει να είναι η διόρθωση. Οι παραπάνω παρατηρήσεις οδηγούν, ύστερα από εκτεταμένη αριθμητική μελέτη, στην παρακάτω εξίσωση:

$$|\Psi_{corr}^j| = A \left( \sqrt[3]{S^j} e^{-BS^j} + C \right) \quad (2.3)$$

$$\Phi_{\Psi_{corr}^j} = \frac{A'}{\sqrt{1 + e^{-Y^j}}}$$

Όπου  $A = a_1 \gamma^{b_1} + c_1$ ,  $a_1 = n_1 e^{-\left(\frac{X-n_2}{n_3}\right)^2}$ ,  $b_1 = n_4 X + n_5$ ,  $c_1 = n_6 e^{-X}$ ,  
 $B = \frac{a_2}{\gamma}$ ,  $a_2 = n_7 e^{-X} + n_8$ ,  $C = a_3 \left( 1 / (1 + e^{-\pi \gamma + 4}) - 1/3 \right)$ ,  $a_3 = n_9 e^{-(n_9 X)^2} + n_{10}$ ,  
 $X = \ln(\Gamma)$ . Οι συντελεστές  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7, n_8, n_9, n_{10}$  δίνονται στην αναφορά [1].

Τελικά η διορθωμένη για μικρές συχνότητες εμπειρική λύση δίνεται από:

$$P_{d,emp}^j = \sum_{j=1}^4 -i \frac{1}{L} e^{i \left( kL \frac{\pi}{4} \right)} D^j |\Psi_{ext,emp}^j| e^{i \Phi_{\Psi_{ext,emp}^j}} \quad (2.4)$$

### 3. Ακρίβεια και υπολογιστικοί χρόνοι των εμπειρικών λύσεων

Σε αυτό το κεφάλαιο η προτεινόμενη λύση συγκρίνεται ως προς την ακρίβεια της με άλλες αντίστοιχες εμπειρικές λύσεις. Η ακρίβεια ορίζεται ως η μέγιστη διαφορά της ηχομείωσης μιας λύσης πίσω από τη σφήνα με την ηχομείωση της ακριβούς λύσης. Η ηχομείωση ορίζεται ως

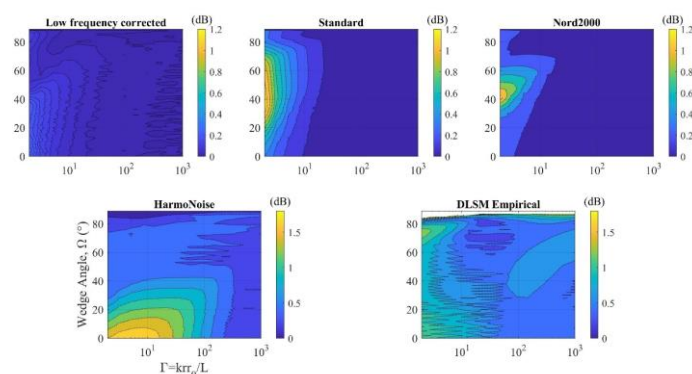
$$IL = -10 \log_{10} \left( \frac{P_d^{rms}(R)}{P_o^{rms}(R)} \right)^2 \quad (3.1)$$

Όπου  $P_d^{ms}(R)$  είναι η rms τιμή της περιθλασης πίσω από τη σφήνα ενώ  $P_0^{ms}(R)$  η τιμή του ελεύθερου πεδίου. Η μέγιστη διαφορά ηχομείωσης ως προς όλες τις μεταβλητές του προβλήματος μιας εμπειρικής λύσης από την ακριβή λύση ορίζεται ως:

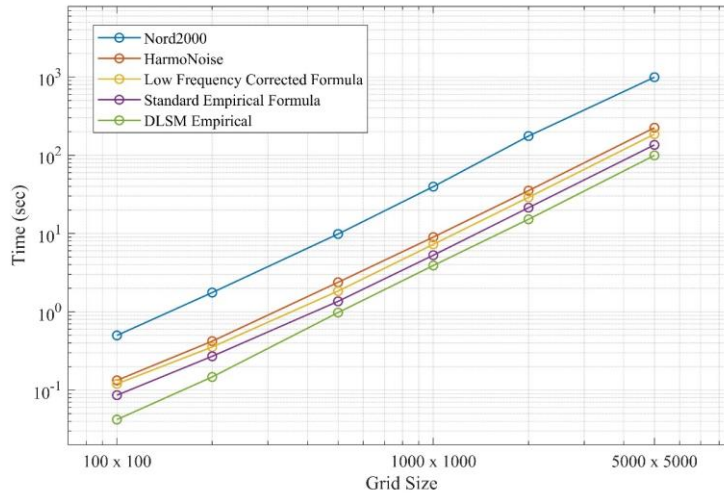
$$err_{IL}^{\max} = |IL_{emp} - IL_{exact}|_{\max} = \left( 20 \log_{10} \left| \frac{P_{exact}^j}{P_{d,emp}^j} \right| \right)_{\max}. \quad (3.2)$$

Στο σχήμα 3.1 συγκρίνονται οι λύσεις Harmonoise[3], η Nord 2000[4], DLSM Empirical[5] (μια παλαιότερη λύση των συγγραφέων) την εμπειρική λύση της εξίσωσης (1.6) (αναφερόμενη ως «standard») και τη διορθωμένη εμπειρική λύση για χαμηλές συχνότητες (αναφερόμενη ως «low frequency corrected formula»). Περιοχές όπου οι διαφορές  $err_{IL}^{\max}$  ξεπερνούν τα 1.8dB απεικονίζονται με άσπρο. Από το σχήμα φαίνεται ότι το Nord 2000 και η standard λύση Εξ. (1.6) είναι ακριβέστερες σε σχέση με τις Harmonoise και DLSM Empirical. Η διορθωμένη λύση χαμηλών συχνοτήτων δίνει την ελάχιστη διαφορά  $err_{IL}^{\max}$  σε όλες τις συχνότητες. Γενικά έχει βρεθεί ότι η λύση χαμηλών συχνοτήτων είναι έγκυρη για  $\Gamma > 0.5$ . Για παράδειγμα για  $r_s = 0.02m$ ,  $r_R = 1m$ , και  $z_R = z_s = 0$  η λύση μπορεί να υπολογιστεί με σφάλμα μικρότερο από 0.4dB για συχνότητα τόσο χαμηλή όσο τα 27.5Hz.

Οι λύσεις συγκρίνονται επίσης και ως προς τον υπολογιστικό τους χρόνο. Από το σχήμα 3.2 φαίνεται πως όσο αυξάνονται οι διαστάσεις του μεγέθους του πλέγματος τόσο αυξάνονται οι υπολογιστικοί χρόνοι σε κάθε μια περίπτωση. Η κλίση σε κάθε μία περίπτωση γραφήματος από τα παραπάνω είδη του εκάστοτε θορύβου παραμένει σταθερή και ίση με όλες τις άλλες. Η μεταβολή ως προς το μέγεθος του πλέγματος παραμένει ίδια σε κάθε μία περίπτωση. Για το πιο πυκνό πλέγμα 10000x10000 το Nord2000 θέλει 66min, το Harmonoise θέλει 15min, η διορθωμένη λύση για χαμηλές συχνότητες 12min, η «standard» εμπειρική λύση 9min ενώ η λιγότερο ακριβής DLSM empirical 6.5min. Η ακριβέστερη λύση χαμηλών συχνοτήτων έχει αυξημένο χρόνο σε σχέση με την «standard» εμπειρική λύση αλλά όχι περισσότερο από 30%.



Σχήμα 3.1 Μέγιστες διαφορές  $err_{IL}^{\max}$  [Εξ. (2.2)] ηχομείωσης εμπειρικών και εμπειρικών λύσεων από την ακριβή λύση.



Σχήμα 3.2 Υπολογιστικοί χρόνοι διάφορων εμπειρικών και ημι-εμπειρικών λύσεων.

## References

- [1] P. Menounou, S. Salagas, and P. Nikolaou, "Empirical Formulas for the Prediction of the Diffraction Field around rigid, absorbing, single or multiple Wedges", under Review in Applied Acoustics.
- [2] P. Nikolaou, A. Marketou, S. Salagas, and P. Menounou, "New analytical solution for the calculation of the acoustic diffraction field around a rigid edge in time and frequency domain," Proceedings of the panhellenic conference ACOUSTICS 2024 (2024).
- [3] E. Salomons, D. v. Maercke, J. Defrance, and F. d. Roo, "The Harmonoise Sound Propagation Model," Acust. Acta Acust97, 62-74 (2011).
- [4] B. Plovsing and J. Kragh. "Nord2000. Validation of the propagation model." DELTA Acoustics & Vibration Report (2006).
- [5] Menounou and V. Asimakopoulos, "Empirical formulas for predicting the insertion loss behind wedges," Appl. Acoust. 182, 108166 (2021).